Concursul Experior Ediția a VI-a

Baraj, 23.11.2013 Clasa a XII-a

Subiecte

1. Fie structura algebrică $(\mathbb{R},*)$, cu $x*y=\left(\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{y}-\sqrt[k]{a}\right)^k$, unde $a\in\mathbb{R}$ fixat şi k impar, $k\geq 3$.

(3p) a) Demonstraţi că $(\mathbb{R},*)$ este grup abelian.

(1p) b) Aflaţi elementul care are simetricul $2^k a$.

2. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x<0\\ -\frac{\pi}{2}, & x\geq 0\end{cases}$.

(3p) a) Stabiliţi dacă f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi în caz afirmativ determinaţi primitivele lui f pe $\mathbb{R}$.

(2p) b) Arătaţi că $\int\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=-\frac{\pi}{2}x+C$.

Se acordă 1p din oficiu. Timp de lucru 1h.

Barem de corectare

Pb1.

a) Comutativitate: $\forall\, x,y\in\mathbb{R},\ x*y=\left(\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{y}-\sqrt[k]{a}\right)^k=\left(\sqrt[k]{y}+\sqrt[k]{x}-\sqrt[k]{a}\right)^k=y*x$	0,25p
Asociativitate: $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}, (x*y)*z=\sqrt[k]{\left(\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{y}-\sqrt[k]{a}\right)^k}+\sqrt[k]{z}-\sqrt[k]{a}=$ $=\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{y}+\sqrt[k]{z}-2\sqrt[k]{a}$ şi $x*(y*z)=\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{\left(\sqrt[k]{y}+\sqrt[k]{z}-\sqrt[k]{a}\right)^k}-\sqrt[k]{a}=$ $=\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{y}+\sqrt[k]{z}-2\sqrt[k]{a}$;	0,75p
Existenţa elementului neutru: $\exists\, e\epsilon\mathbb{R}$ a. î. $e*x=x*e=x, \forall\, x\epsilon\mathbb{R}$. Dacă e*x=x $\Rightarrow\left(\sqrt[k]{e}+\sqrt[k]{x}-\sqrt[k]{a}\right)^k=x\Rightarrow\sqrt[k]{e}+\sqrt[k]{x}-\sqrt[k]{a}=\sqrt[k]{x}\Rightarrow\sqrt[k]{e}=\sqrt[k]{a}\Rightarrow\exists\, e\epsilon\mathbb{R},\ e=a$.	1p

Fiecare element are simetric: $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, x' \in \mathbb{R}$ a. î. $x * x' = x' * x = e$. Dacă $x*x'=e \implies \left(\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{x'} - \sqrt[k]{a}\right)^k = a \implies \sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{x'} - \sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{a} \implies \sqrt[k]{x'} = 2\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x} \implies \exists\, x' \in \mathbb{R},\ x' = \left(2\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x}\right)^k$.	1p
b) $(x')' = x \implies x = \left(2^k a\right)' = \left(2\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{2^k a}\right)^k = 0$.	1p

Pb2.

a) $\lim\limits_{x \nearrow 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arctg}\frac{1}{0_-} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \implies l_s(0) = l_d(0) = f(0) = -\frac{\pi}{2}$ $\implies$ f continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ f admite primitive pe $\mathbb{R}$.	1p
Dacă $x \in (-\infty, 0)$, $\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx = \int x' \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx = x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \int x \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^2 dx =$ $= x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx =$ $= x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ $\implies F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad F(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1, & \text{dacă } x < 0 \\ -\frac{\pi}{2} + C_2, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$ este o primitivă a lui f dacă este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R} \iff C_1 = C_2$; Finalizare.	1p 0,5p 0,5p
b) funcţia $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ are derivata $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0$ $\implies$ g este constantă pe $(-\infty, 0)$ $\implies g(x) = g(-1) = -\frac{\pi}{2}, \forall x \in (-\infty, 0)$; Finalizare	1p 1p